曲率円（接触円）

曲線上に適当に点 P，P’，P” の 3 点をとって描いた円のうち，

P’と P”を P に無限に近づけたときできる極限の円を「点 P における曲率円（接触円）」という。

点 P における曲率円と曲線は点 P においてぴったりと一致する。

また，曲率円の中心を曲率中心，半径を曲率半径，半径の逆数を曲率という。

2 つの平面曲線の接触の仕方による分類

2 つの平面曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=x_0$ で

共有点をもつための必要十分条件は，

$f(x_0)=g(x_0)$ である。

接するための必要十分条件は，

$f(x_0)=g(x_0)$ かつ共有点において共通接線をもつこと，

すなわち $f'(x_0)=g'(x_0)$ が成り立つこと。

曲線の形が一致するための必要十分条件は，

$f(x_0)=g(x_0)$ かつ $f'(x_0)=g'(x_0)$ かつ

共有点において 2 曲線の形つまり接線の傾きの変化の様子が一致すること，

すなわち $f''(x_0)=g''(x_0)$ が成り立つこと。

である。

$f(x_0)=g(x_0)$ だけが成り立つ場合

2 曲線は $x=x_0$ で 0 位の接触をしているという。

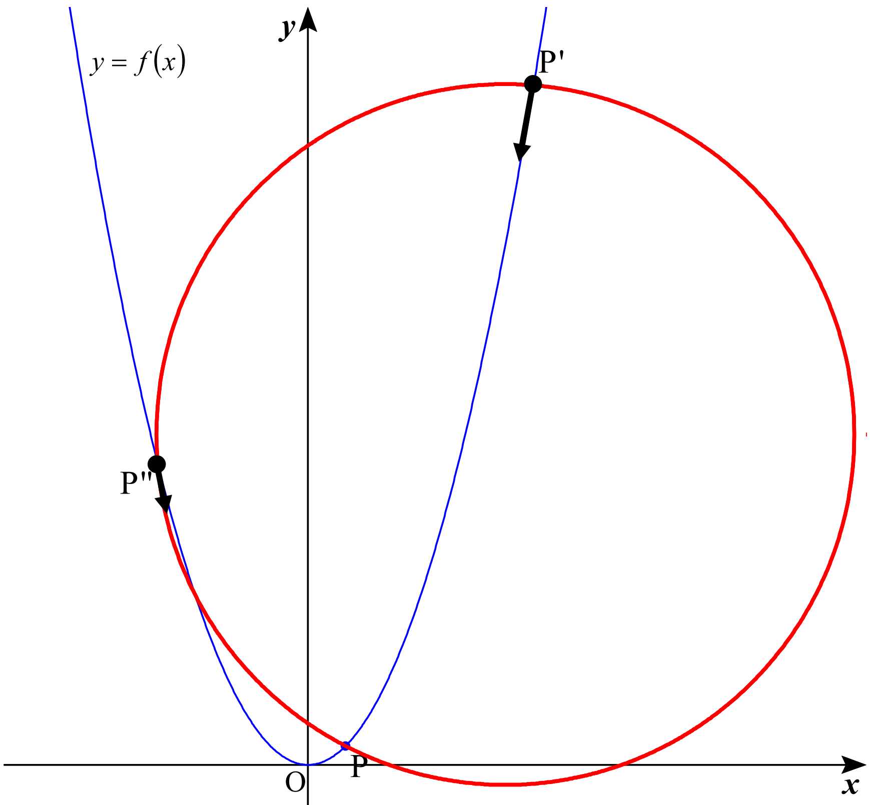
$f(x_0)=g(x_0)$ かつ $f'(x_0)=g'(x_0)$ まで成り立つ場合

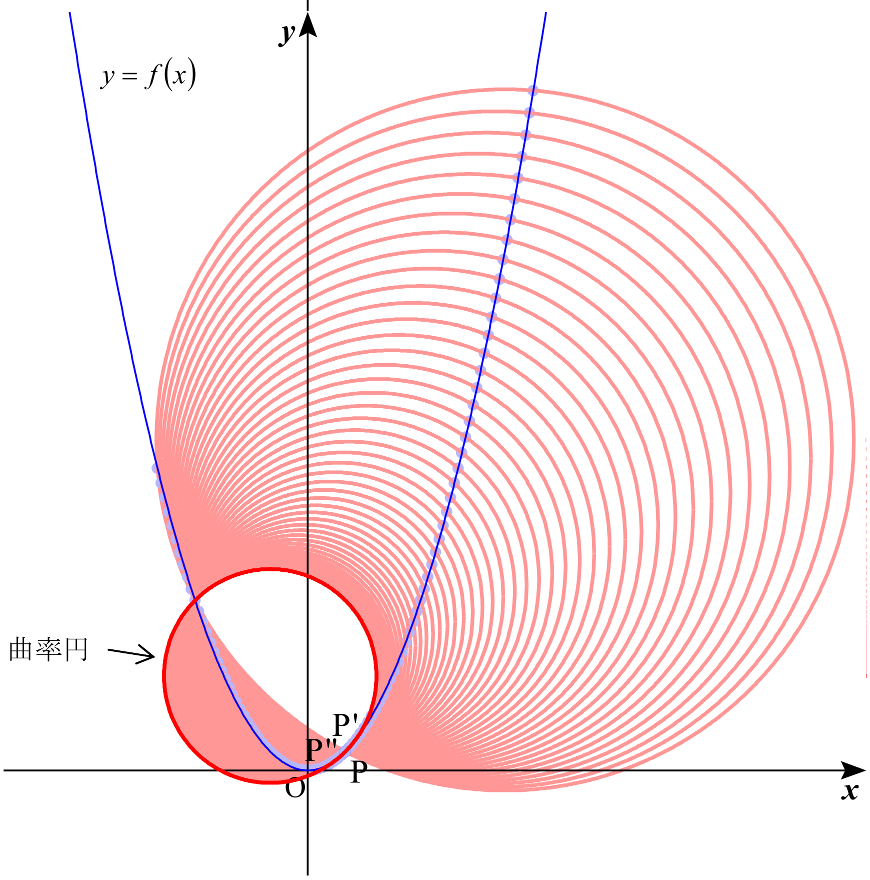
2 曲線は $x=x_0$ で 1 位の接触をしているという。

$f(x_0)=g(x_0)$ かつ $f'(x_0)=g'(x_0)$ かつ $f''(x_0)=g''(x_0)$ まで成り立つ場合

2 曲線は $x=x_0$ で 2 位の接触をしているという。

高校で学習するのは 1 位の接触までである。


y
y = f(x)
P'
P''
O
P
x


y
y = f(x)
曲率円
P'
P''
O
P
x

曲率円の中心と半径の求め方

$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(x_0, f(x_0)\right)$ を通る円が曲率円であるための必要十分条件は，
点 P において $y=f(x)$ と 2 位の接触をしていることである。
つまり，曲率円の方程式を $y=g(x)$ で表したとき，
$f(x_0)=g(x_0)$ かつ $f'(x_0)=g'(x_0)$ かつ $f''(x_0)=g''(x_0)$ が成り立つことである。
このことを使って，曲率円を求めてみよう。

まず，
$y=f(x)$ 上の点 P の座標を $\mathrm{P}\left(x_0, f(x_0)\right)$，
点 P における曲率円の方程式を $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ ・・・①
とおく。
式①を x で微分すると，

$2(x-\alpha)+2(y-\beta)\dfrac{dy}{dx}=0$ より，$x-\alpha+(y-\beta)\dfrac{dy}{dx}=0$ ・・・②

式②をさらに x で微分すると，

$1+\dfrac{d(y-\beta)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dy}{dx}+(y-\beta)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=0$ より，

$1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ・・・③

ここで，見た目をスッキリさせる目的で，$\dfrac{dy}{dx}=y'$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''$ と表すことにする。

すると，②，③は，それぞれ
$x-\alpha+(y-\beta)y'=0$ ・・・④
$1+y'^2+(y-\beta)y''=0$ ・・・⑤
となる。

よって，⑤より，$y-\beta=-\dfrac{1+y'^2}{y''}$ ・・・⑥

また，④と⑥より，$\alpha=x-\dfrac{1+y'^2}{y''}\cdot y'$ ・・・⑦

⑥より，$\beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}$ ・・・⑧

①，⑦，⑧より，$r^2=\dfrac{\left(1+y'^2\right)^3}{y''^2}$

よって，$r=\dfrac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ ・・・⑨

$y=f(x)$と点 P における曲率円$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$は,
点 P において 2 位の接触をしているから,

曲率円を 1 階微分, 2 階微分したときの点 P における値をそれぞれ$y_0{}', y_0{}''$とすると,

$y_0=f(x_0)$, $y_0{}'=f'(x_0)$, $y_0{}''=f''(x_0)$ ・・・⑩ が成り立つ。

よって,
曲率円の中心, すなわち曲率中心(α,β)は, ⑦, ⑧, ⑩より,

$$(\alpha,\beta)=\left(x_0-\frac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)}f'(x_0),\ f(x_0)+\frac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)}\right)$$

曲率円の半径, すなわち曲率半径は, ⑨, ⑩より,

$$r=\frac{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}$$

よって, 曲率は,

$$\frac{1}{r}=\frac{|f''(x_0)|}{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

曲率円の例:楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の曲率円

$$y=f(x)=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ より,

$$2b^2x+2a^2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}=\mp\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\mp\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$2b^2+2a^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2a^2y\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ より,

$$b^2+\frac{b^2x^2}{a^2-x^2}+a^2\cdot\left(\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\therefore\frac{b}{a^2-x^2}\pm\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}=\mp\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

以上より,

$$f(x)=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ ,\ \ f'(x)=\mp\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ ,\ \ f''(x)=\mp\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

よって,

$$(\alpha,\beta)=\left(x-\frac{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}{\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}\frac{bx}{a(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\ ,\ \pm\frac{b(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\mp\frac{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}{\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3,\mp\frac{(a^2-b^2)(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3b}\right)$$

$$r=\frac{\left\{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{\{a^4-(a^2-b^2)x^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の曲率円のまとめ

曲率中心 $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^4}x^3, \mp\dfrac{(a^2-b^2)(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3b}\right)$

曲率半径 $r=\dfrac{\{a^4-(a^2-b^2)x^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$

たとえば，$(a,0)$ における曲率円の中心 $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a},0\right)$，曲率円の半径$=a-\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{b^2}{a}$